Πρόταση

Έστω X χώρος πεπερασμένης διάστασης (με μια νόρμα).

i) Αν Y χώρος με νόρμα και $R : X \to Y$ γραμμική τότε R συνεχής

ii) Όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες

Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ Hamel βάση του X και $T : X \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ισομορφισμός (από Προηγούμενη πρόταση).

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in X \Rightarrow \|R(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(e_i)\| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|R(e_i)\| \leq (\sum |\lambda_i|^2)^{1/2} \cdot (\sum \|R(e_i)\|^2)^{1/2} =$

$$= \|T(x)\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|R(e_i)\|^2\right)^{1/2} \leq \|T\| \cdot \|x\| \left[\sum_{i=1}^{n} \|R(e_i)\|^2\right]^{1/2} =$$

$$= \|T\| \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \|R(e_i)\|^2\right]^{1/2} \cdot \|x\| \Rightarrow R \text{ φραγμ.} \Rightarrow R \text{ συνεχής}$$

ii) Αν $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X τότε ο ταυτοτικός τελεστής από τον $(X, \|\cdot\|)$ στον $(X, \|\cdot\|')$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$

Πρόταση Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα υπόχωρος ενός άλλου χώρου με νόρμα τότε αυτός είναι κλειστός.

Απόδειξη

Έστω Z χώρος με νόρμα και Y πεπερ. διάστασης υπόχωρος του Z. Τότε από την μεθεπρογούμενη πρόταση / θεώρημα ο Y ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι Banach. Άρα, Y χώρος Banach. Άρα, Y κλειστός.

Υπενθύμιση ορισμού απόστασης δύο συνόλων

$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\}$

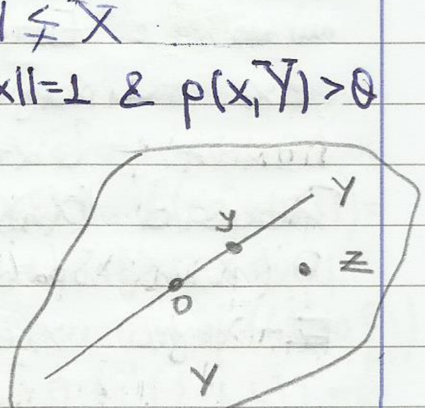
$\rho(\{x\},B) = \rho(x,B) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{B}$

ΛΗΜΜΑ

Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subsetneq X$

$\theta : 0 < \theta < 1$ τότε $\exists x \in X : \|x\| = 1$ & $\rho(x,Y) > \theta$

Απόδειξη



Έστω $z \in X$ και $z \notin Y$

Θέτουμε $d = \rho(z,Y) > 0$ διότι Y κλειστός και $z \notin Y$.

Επιλέγουμε $\theta' : \theta < \theta' < 1$

τότε $\frac{d}{\theta'} > d$. Άρα, $\exists y \in Y : \|y - z\| < \frac{d}{\theta'}$ (1)

Θέτουμε $x = \dfrac{z-y}{\|z-y\|}$

Προφανώς $\|x\|=1$

Για κάθε $y' \in Y$: $\|x-y'\| = \left\| \dfrac{z-y}{\|z-y\|} - y' \right\| =$

$= \dfrac{1}{\|z-y\|} \| z-y - \|z-y\| y' \| =$

$= \dfrac{1}{\|z-y\|} \cdot \| z - (\underbrace{y + \|z-y\| y'}_{\in Y}) \| > \dfrac{1}{\|z-y\|} \cdot d \overset{(1)}{>} \theta'$

Άρα, $\inf\{ |x-y'| : y' \in Y \} \geq \theta' \Rightarrow \rho(x, Y) \geq \theta' > \theta$

Θεώρημα (Riesz)

Έστω X χώρος με νόρμα

τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) ο X είναι πεπερασμένης διάστασης

ii) κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές

iii) Η κλειστή μπάλα του X, $B_X = \{x : \|x\| = 1\}$ είναι συμπαγής

Απόδειξη

i) ⇒ ii) Διότι $X \sim (\mathbb{R}^n, \|\|_2)$ όπου n διάσταση του χώρου X και στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ισχύει η ii

ii) ⇒ iii) Διότι η B_X κλειστό και φραγμένο

iii) ⇒ i) : Έστω X απειροδιάστατος και B_X συμπαγές σύνολο. Από το παραπάνω ΛΗΜΜΑ, κατασκευάζουμε επαγωγικά μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν X : $\|x_n\| = 1$ και

$\rho(x_{n+1}, \text{Span}\{x_i / i \in \{1,2,\dots,n\}\}) > \frac{1}{2}$

Επιλέγω $x_1 \in X$: $\|x_1\| = 1$

⋮ ⇒

Επιλέγω $x_n \in X$: $\|x_n\| = 1$

$\Rightarrow$ Span $\{x_1, \dots, x_n\}$ πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, άρα είναι κλειστός και γνήσιος υπόχωρος (διότι ο X απειροδιάστατος)

Άρα, από το λήμμα, $\exists\, x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| = 1$ με $\rho(x_{n+1}, \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}) > \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, η ακολουθία που κατασκευάσαμε είναι ακολουθία στο B_X με ιδιότητα ότι $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ $\forall n \neq m$. Άρα, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. ($\lightning$) αφού B_X συμπαγής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Έστω X χώρος με νόρμα και $f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $f \in X^*$ (δηλ. f συνεχής)

ii) $f^{-1}(\{0\}) = \ker f$ κλειστός υπόχωρος του X

iii) $f^{-1}(\{0\})$ δεν είναι πυκνό στο X

iv) $\exists\, \varepsilon > 0 : f(S_X(0, \varepsilon)) \neq \mathbb{R}$

Λύση

i) $\Rightarrow$ ii) διότι $\{0\}$ κλειστό και f συνεχής

ii) $\Rightarrow$ iii) $\overline{f^{-1}(\{0\})} \underset{f \text{ κλειστό}}{=} f^{-1}(\{0\}) \underset{f \neq 0}{\neq} X$

iii) $\Rightarrow$ iv) : $\exists\, x \in X\ \exists\, \varepsilon > 0 : S_X(x, \varepsilon) \cap f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

$\Rightarrow 0 \notin f(S_X(x, \varepsilon)) = f(x + S_X(0, \varepsilon)) = f(x) + f(S_X(0, \varepsilon))$

$\Rightarrow f(S_X(0, \varepsilon)) \neq \mathbb{R}$

iv) $\Rightarrow$ i) $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} : \lambda_0 \notin f(S_X(0, \varepsilon))$

Τότε $\lambda_0 \neq 0$ και $-\lambda_0 \notin f(S_X(0,\varepsilon))$ διότι η σφαίρα $S_X(0, \varepsilon) = -S_X(0, \varepsilon)$ και $f(S_X(0, \varepsilon)) = f(-S_X(0, \varepsilon)) \overset{\text{γραμ.}}{\underset{f}{=}} -f(S_X(0, \varepsilon))$. Θέτοντας $M = |\lambda_0| > 0$ έχουμε $M \notin f(S_X(0, \varepsilon))$, $1 \notin f(S_X(0, \frac{\varepsilon}{M}))$ και $-1 \notin f(S_X(0, \frac{\varepsilon}{M}))$

$f(S_X(0, \varepsilon)) \cap \{-1, 1\} = \emptyset \Rightarrow S_X(0, \frac{\varepsilon}{M}) \cap f^{-1}(\{-1, 1\}) = \emptyset$

$\Rightarrow 0 \notin \overline{f^{-1}(\{-1, 1\})} \Rightarrow 0 \notin \overline{f^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| = 1\})}$ και από βασική Πρόταση η f συνεχής

(2) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Τότε
i) $\exists\, T : X \to \mathbb{R}$ όχι συνεχής
ii) $\exists\, Y \leq X$ που Y όχι κλειστός
iii) $\exists$ μη ισοδύναμες νόρμες στον X

Απόδ.

i) $\exists \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ γραμ. ανεξ. $\subseteq X$ με $\|e_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
(Πράγματι αν B Hamel βάση του X τότε B απειροσύνολο. Επιλέγουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν B με $x_n \neq x_m$ $\forall m \neq n$ και θέτουμε $e_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$
$\exists\, T : X \to \mathbb{R}$ γραμμική ώστε $T(e_n) = n$, $\forall n$
$\sup\{|Tx|, x \in X, \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{|Te_n|, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty \Rightarrow T$ ασυνεχής

ii) Αν T όπως στο (i) τότε $\ker T = T^{-1}(\{0\})$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος βάσει της προηγούμενης άσκησης

iii) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι X είναι $X = \{x \mid x : I \to \mathbb{R}\ \{i \in I,\ x(i) \neq 0\}$ πεπερ. $\forall I\}$ όπου I άπειρο και με πράξεις κατά σημείο (διότι κάθε γραμμικός χώρος είναι γραμμικά ισόμορφος με ένα χώρο της παραπάνω μορφής)
$\forall x \in X$ θέτουμε $\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |x(i)|$ και $\|x\|_\infty = \sup\{|x(i)| : i \in I\}$ είναι νόρμες στον X και μάλιστα __μη__ ισοδύναμες

Προφανώς $\|x\|_\infty = \|x\|_1$, $\forall x \in X$

Επιλέγουμε $J = \{i_1, i_2, \dots\} \subset I$

με $i_k \neq i_\lambda$, $\forall k,\lambda \in \mathbb{N}$ με $k \neq \lambda$

Ορίζουμε $x_n \in X$ ως εξής

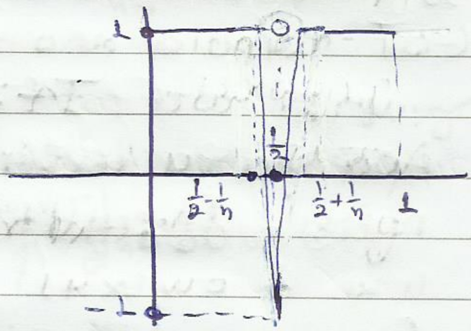
$$x_n(i) = \begin{cases} 1, & i = i_k,\ k \le n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\|x_n\|_\infty = 1$ και $\|x_n\|_1 = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$ ώστε $\|x\|_1 \le M \cdot \|x\|_\infty$, $\forall x \in X$

Άρα, $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$

Άσκηση 3 (φυλλάδιο 1)



$(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

$T : C[0,1] \to \mathbb{R}$

$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - f(\frac{1}{2})$

$\forall f \in C[0,1]$

$|T(f)| = |\int_0^1 f(t)\,dt - f(\frac{1}{2})| \le |\int_0^1 f(t)\,dt| + |f(\frac{1}{2})| \le$

$\le \int_0^1 |f(t)|\,dt + |f(\frac{1}{2})| \le \|f\|_\infty (1-0) + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$

Άρα, T φραγμένος με $\|T\| \le 2$

Μια f_n που ικανοποιεί την $T(f)$ είναι

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 & x \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ \alpha_n x + b_n, & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ \alpha_n' x + b_n', & x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \end{cases}$$

όπου για να βρούμε τα α_n και b_n

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \alpha_n \frac{1}{2} + b_n \\ 1 = \alpha_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n = \dots \quad b_n = \dots$$

για να βρούμε τα α_n' και b_n'

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \alpha_n' \frac{1}{2} + b_n' \\ 1 = \alpha_n'(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) + b_n' \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n' = \dots \text{ και } b_n' = \dots$$

τότε $\|f_n\| = 1$ με

$$\|T\| \geq \frac{|Tf_n|}{\|f_n\|_\infty} = \frac{\int_0^{1} f_n(t)\,dt - f_n(\frac{1}{2})}{1} = \frac{(1-\frac{2}{n})+1}{1} = 2-\frac{2}{n}$$

Για $n \to \infty$, $\|T\| \geq 2$

Άρα, $\|T\| = 2$

Επιπλέον ερώτημα για την ασκ. 3

Νδο $\nexists\, f \in C[0,1]$ με $\|f\|_\infty = 1$ και $Tf = 2$

Λύση

Υποθέτουμε ότι $\exists f : \|f\|_\infty = 1$ και $Tf = 2$ τότε

$\int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$ και $-f(\frac{1}{2}) \leq 1$

Εάν κάποια από τις δύο ανισότητες είναι γνήσια τότε $Tf < 2$

Άρα για να ισχύει $Tf = 2$

πρέπει $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$ τε $-f(\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -1$

και f συνεχής. Άρα, η $f(t) < 0$, $t \in (\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)$

Έτσι,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1} f(t)\,dt$$

$$\leq (\tfrac{1}{2}-\delta)\cdot 1 + 0 + (1-(1/2+\delta)) = 1-2\delta < 1 \ (\text{↯})$$

Παρατήρηση:

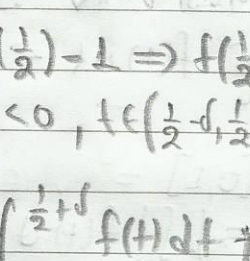
Κάτι επιπλέον:

Για κάθε $t \in [0,1]$, $F_t : C[0,1] \to \mathbb{R}$

με $F_t(f) = f(t)$ ανήκει στο $C[0,1]^*$ με $\|F_t\| = 1$

Για $t, s \in [0,1]$ με $t \neq s$

$$\|F_t - F_s\| \geq \frac{(F_t - F_s)(f)}{\|f\|_\infty} = 1-(-1) = 2$$



Άρα, $\{F_t : t \in [0,1]\} \subseteq C[0,1]^*$

με $\|F_t - F_s\| \geq 2$ $\forall t \neq s$

Συμπεραίνουμε ότι $C[0,1]^*$ μη διαχωρίσιμος

$\exists f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\|f\|_\infty = 1$, $f(t) = 1$

και $f(s) = -1$

Ασκηση

Να δοθεί παράδειγμα ενός $f \in (C_0)^*$ ώστε $\|f\| > |f(x)|$ $\forall x \in C_0$ με $\|x\|_\infty \leq 1$.

Λύση

$y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$
$f: C_0 \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad , \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$

είχαμε δει στο προηγούμενο Μαθημα

Εστω $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $y \in \ell^1(\mathbb{N})$

$\|y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

ορίζουμε $f: C_0 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{N})$

$f \in (C_0(\mathbb{N}))^*$

$\|f\| = \|y\|_1 = 1$

$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{N})$, με $\|x\|_\infty \leq 1$

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

διότι $|x_n| \leq 1$, $\forall n$ ενώ $|x_n| < 1$, $\forall n$ εφόσον $x_n \to 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ HAHN-BANACH ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΜΕ ΝΟΡΜΑ

Ορισμός: Εστω X γραμμικός χώρος.
Μια συνάρτηση $p: X \to \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές
i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$
ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$

Παραδείγματα:

α) κάθε νόρμα σε ένα γραμμικό χώρο είναι γραμμικό υποσυναρτησοειδές

β) Αν X γραμμικός χώρος, $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος με νορμα και $T: X \to Y$ γραμμική
Τοτε η $p: X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|T(x)\|$
Είναι γραμμικο υποσωαρτισοειδες.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn και Banach)
Ας είναι X γραμμικός χώρος, $p: X \to \mathbb{R}$ ένα γραμμικο υποσωαρτισοειδες και $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση με Y γραμμ. υποχωρος του X και $\varphi(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$. Τοτε υπάρχει $\psi: X \to \mathbb{R}$ γραμμική και επεκταση της φ (δηλ. $\psi/_Y = \varphi$) ωστε $\psi(x) \leq p(x)$ για καθε $x \in X$